JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 1, 77–84 (1968)

Beste Approximation von Elementen eines nuklearen Raumes

EBERHARD SCHOCK

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn, Bonn, Deutschland

Für einen normierten Funktionenraum E und einen i-dimensionalen Teilraum E_i von E sei

$$\rho(x, E_i) = \inf\{\|x - y\|, y \in E_i\}$$

der Minimalabstand des Elementes x von E_i. Es ist bekannt, daß es Teilräume E_i gibt, so daß $\rho(x, E_i)$ für alle $x \in E$ eine Nullfolge ist. Wie man weiß, hängt die Geschwindigkeit, mit der $\rho(x, E_i)$ gegen Null konvergiert, sehr wesentlich von den Differenzierbarkeitseigenschaften von x ab.

Wir werden hier die Konvergenzgeschwindigkeit der Größe $\rho(x, E_i)$ untersuchen für den Fall, daß x ein Element eines nuklearen lokalkonvexen Raumes E ist. Dabei stellt sich heraus, daß es zu jeder stetigen Halbnorm p_U auf E eine Folge von i-dimensionalen Teilräumen E_i von E gibt, so daß für jede beschränkte Teilmenge A von E sogar das Supremum $\sup\{\rho(x, E_i), x \in A\}$ eine mindestens schnell fallende Zahlenfolge ist, d.h.

$$\lim_{i \to \infty} i^k \sup\{\rho(x, E_i), x \in A\} = 0$$

für alle natürlichen Zahlen k, genauer: die Folge $\{\sup\{\rho(x, E_i), x \in A\}, i \in I\}$ ist ein Element des diametralen Folgenraumes von E.

1.1. Es sei E ein lokalkonvexer Raum. $U(E)$ sei ein Fundamentalsystem von abgeschlossenen absolutkonvexen Nullumgebungen U von E. Für $U \in U(E)$ sei $p_U(x) = \inf\{\tau > 0, x \in \tau U\}$ das Minkowski-Funktional von U. Wir bilden für $U \in U(E)$ den normierten Raum $E(U) = E/p_U^{-1}\{0\}$ mit der Norm p_U. Ein lokalkonvexer Raum E heißt nuklear, wenn es zu jedem $U \in U(E)$ ein $V \in U(E)$ gibt mit $V \subset U$, so daß die kanonische Abbildung $E(V, U) : E(V) \to E(U)$ nuklear ist, d.h. es gibt lineare Funktionale $l_i \in E(V)'$ und Elemente $y_i \in E(U)$ mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|l_i\| \cdot \|y_i\| < \infty,$$

so daß für alle $x \in E(V)$ gilt

$$E(V, U)x = \sum_{i=0}^{\infty} l_i(x) y_i.$$

Eine Einführung in die Theorie der nuklearen Räume findet man in [5].

1.2. Es sei $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und P eine Menge von Zahlenfolgen $\sigma = \{\sigma_i, i \in I\}$ mit den Eigenschaften

(F1) Für alle $i \in I$ gilt $\sigma_i \geqslant 0$.

(F2) Für alle $i \in I$ gibt es ein $\sigma \in P$ mit $\sigma_i > 0$.

(F3) Für je zwei Folgen $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)} \in P$ gibt es eine Folge $\sigma \in P$ mit $\max(\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)}) \leqslant \sigma_i$.

Dann bildet die Menge aller (reellen oder komplexen) Zahlenfolgen $\eta = \{\eta_i, i \in I\}$ mit

$$p_\sigma(\eta) = \sum_I |\eta_i| \, \sigma_i < \infty$$

für alle $\sigma \in P$ einen linearen Raum Γ_P (Folgenraum), der in der durch die Halbnormen p_σ erzeugten lokalkonvexen Topologie vollständig ist.

Ein Folgenraum Γ_P ist nach einem Kriterium von Grothendieck und Pietsch genau dann nuklear, wenn es zu jedem $\sigma \in P$ ein $\tau \in P$ und eine Folge $\mu = \{\mu_i, i \in I\} \in 1^1$ gibt mit $\sigma_i \leqslant \mu_i \tau_i$. Dann läßt sich seine Topologie auch erzeugen durch das System der Halbnormen

$$q_\sigma(\eta) = \sup\{|\eta_i| \, \sigma_i, \, i \in I\} \qquad \text{für } \sigma \in P.$$

Ein Folgenraum Γ_P heißt Potenzreihenraum, wenn es eine Folge von reellen Zahlen α_i mit $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots$ gibt, so daß P aus den Folgen $\sigma = \{\rho^{\alpha_i}, i \in I\}$ mit $0 < \rho < \rho_0$ besteht. Ist $\rho_0 < \infty$ (bzw. $\rho_0 = \infty$), so heißt Γ_P von endlichem (bzw. unendlichem) Typus.

Insbesondere bezeichnen wir mit (s) den Raum der schnell fallenden Zahlenfolgen mit $P = \{\{\rho^{\log(i+1)}, i \in I\}, \, 0 < \rho < \infty\}$ d.h. $P = \{\{(i+1)^k, i \in I\}, k \in I\}$.

1.3. Für zwei Teilmengen A und B eines lokalkonvexen Raumes E mit $A \subset B$ und für einen linearen Teilraum E_i von E mit $\dim E_i = i$ sei

$$\delta(A, B, E_i) = \inf\{\delta > 0, \, A \subset \delta B + E_i\}$$

und

$$\delta_i(A, B) = \inf\{\delta(A, B, E_i), \, E_i \subset E, \, \dim E_i = i\}.$$

$\delta_i(A, B)$ heißt i-ter Durchmesser von A bezüglich B.

1.4. Als diametrale Dimension $\Delta_U(E)$ eines lokalkonvexen Raumes E bezeichnet man (vgl. [*1*]) die Gesamtheit aller Zahlenfolgen $\delta = \{\delta_i, i \in I\}$ mit der Eigenschaft: Für jedes $\delta \in \Delta_U(E)$ und für jede Nullumgebung $U \in U(E)$ gibt es ein $V \in U(E)$ mit $V \subset U$, so daß für alle $i \in I$ gilt $\delta_i(V, U) \leqslant \delta_i$.

Mit Hilfe der diametralen Dimension wird in [7] jedem lokalkonvexen Raum E ein Folgenraum, der diametrale Folgenraum $\Lambda_U(E)$ zugeordnet:

$$\Lambda_U(E) = \left\{\{\eta_i, i \in I\}, \, \sum_I |\eta_i| \, \delta_i^{-1} < \infty \qquad \text{für alle } \delta \in \Delta_U(E)\right\}.$$

Ein lokalkonvexer Raum E ist dann und nur dann nuklear, wenn sein diametraler Folgenraum $\Lambda_U(E)$ nuklear ist.

1.5. Sei $U \in U(E)$, E_i ein linearer Teilraum von E mit $\dim E_i = i$ und A eine Teilmenge von U. Dann bezeichnen wir mit

$$\rho(x, p_U, E_i) = \inf\{p_U(x-y), y \in E_i\}$$

den Minimalabstand von x zu E_i bezüglich der Halbnorm p_U und mit

$$\rho(A, p_U, E_i) = \sup\{\rho(x, p_U, E_i), x \in A\}.$$

2.1. Nach diesen Vorbemerkungen beweisen wir das

LEMMA 1. *Für alle $U \in U(E)$, für jede Teilmenge A von U und für jeden endlichdimensionalen Teilraum E_i von E gilt*

$$\rho(A, p_U, E_i) = \delta(A, U, E_i).$$

Beweis. Wir zeigen

$$\rho(A, p_U, E_i) \leqslant \delta(A, U, E_i). \tag{1}$$

Sei $A \subset \delta U + E_i$. Dann gibt es für alle $x \in A$ ein $y \in E_i$ mit $x - y \in \delta U$. Also ist $p_U(x-y) \leqslant \delta$. Dann ist aber auch $\inf\{p_U(x-y), y \in E_i\} \leqslant \delta$. Da diese Aussage für alle $x \in A$ gilt, ist $\sup\{\inf\{p_U(x-y), y \in E_i\}, x \in A\} \leqslant \delta$. Daher gilt für alle $\delta > 0$ mit $A \subset \delta U + E_i$ die Aussage $\rho(A, p_U, E_i) \leqslant \delta$. Wir erhalten also

$$\rho(A, p_U, E_i) \leqslant \inf\{\delta > 0, A \in \delta U + E_i\} = \delta(A, U, E_i).$$

$$\rho(A, p_U, E_i) \geqslant \delta(A, U, E_i). \tag{2}$$

Für alle $x \in A$ ist $\inf\{p_U(x-y), y \in E_i\} \leqslant \rho(A, p_U, E_i)$. Da zu jedem $x \in A$ eine Minimallösung $y(x) \in E_i$ existiert mit $\inf\{p_U(x-y), y \in E_i\} = p_U(x - y(x))$, ist $x \in y(x) + \rho(A, p_U, E_i) \cdot U$. Also ist $x \in \rho(A, p_U, E_i) \cdot U + E_i$. Diese Aussage gilt für alle $x \in A$. Daher ist $A \subset \rho(A, p_U, E_i) \cdot U + E_i$. Daraus folgt

$$\delta(A, U, E_i) = \inf\{\delta > 0, A \subset \delta U + E_i\} \leqslant \rho(A, p_U, E_i).$$

Damit ist die Behauptung des Lemmas bewiesen.

2.2. Als einfache Folgerung aus diesem Lemma erhalten wir den

SATZ 1. *Sei E ein nuklearer Raum. Für alle $U \in U(E)$ gibt es eine Folge von Teilräumen E_i von E mit $\dim E_i = i$, so daß für alle beschränkten Teilmengen A von E gilt*

$$\{\rho(A, p_U, E_i), i \in I\} \in \Lambda_U(E)$$

das heißt, für alle $\delta \in \Delta_U(E)$ gilt

$$\lim_{i \to \infty} \delta_i^{-1} \rho(A, p_U, E_i) = 0.$$

Beweis. Da $\Lambda_U(E)$ nuklear ist, gibt es zu jedem $\delta \in \Delta_U(E)$ ein $\gamma \in \Delta_U(E)$ und ein $\mu \in l^1$ mit $\gamma_i \leqslant \mu_i \delta_i$ für $i \in I$. Zu der Nullumgebung U bestimmen wir ein $V \in U(E)$ mit $\delta_i(V, U) \leqslant \gamma_i$. Dann gibt es für die beschränkte Menge A ein $r > 0$ mit $A \subset rV$, also ist $\delta_i(A, U) \leqslant r\delta_i(V, U) \leqslant r\gamma_i$ und es gilt

$$\sum_I \delta_i(A, U)\delta_i^{-1} \leqslant r \sum_I \gamma_i \delta_i^{-1} \leqslant r \sum_I \mu_i < \infty.$$

Für alle $i \in I$ gibt es Teilräume E_i mit $\dim E_i = i$, so daß gilt $\rho(A, p_U, E_i) = \delta(A, U, E_i) \leqslant 2\delta_i(A, U)$. Also gilt

$$\sum_I \rho(A, p_U, E_i)\delta_i^{-1} \leqslant 2 \sum_I \delta_i(A, U)\delta_i^{-1} \leqslant 2r \sum_I \mu_i < \infty$$

Die Folge $\{\rho(A, p_U, E_i), i \in I\}$ gehört also zu $\Lambda_U(E)$.

Da für einen nuklearen Raum E der diametrale Folgenraum $\Lambda_U(E)$ stets ein Teilraum von (s) ist, erhalten wir als

KOROLLAR. *Für alle $U \in U(E)$ gibt es eine Folge von i-dimensionalen Teilräumen E_i von E, so daß für jede beschränkte Teilmenge A von E gilt: Für alle natürlichen Zahlen k ist*

$$\lim_{i \to \infty} i^k \rho(A, p_U, E_i) = 0.$$

2.3. Für die praktischen Anwendungen ist die Aussage von Satz 1 noch zu schwach. Ist jedoch E ein nuklearer (F)-Raum mit regulärer Basis, so lassen sich die Teilräume aus Satz 1 explizit angeben.

Eine Folge von Elementen x_i heißt eiie Basis des nuklearen (F)-Raumes E, wenn es für jedes $x \in E$ eine eindeutig bestimmte Zahlenfolge $\{\eta_i, i \in I\}$ gibt, so daß die Beziehung

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \eta_i x_i$$

besteht.

Eine Basis heißt regulär [2], wenn es ein Fundamentalsystem $U_D(E)$ von absolutkonvexen abgeschlossenen Nullumgebungen gibt, so daß für alle U, $V \in U_D(E)$ die Folge $\{p_U(x_i)/p_V(x_i), i \in I\}$ monoton ist. Man sieht sofort, daß die Einheitsvektoren in einem Potenzreihenraum eine reguläre Basis bilden.

LEMMA 2. *Sei E ein nuklearer (F)-Raum mit regulärer Basis $\{x_i, i \in I\}$, sei $E_i = spann(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1})$. Dann gilt: Für alle U, $V \in U_D(E)$ mit $V \subset U$ ist*

$$\delta(V, U, E_i) = \delta_i(V, U).$$

Beweis. [2].

Aus Satz 1 und Lemma 2 folgt dann

SATZ 2. *Sei E ein nuklearer (F)-Raum mit regulärer Basis $\{x_i, i \in I\}$. Sei $E_i = \text{spann}(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1})$. Dann gilt für alle $U \in U_D(E)$ und für alle beschränkten Teilmengen A von E*

$$\{\rho(A, p_U, E_i), i \in I\} \in \Lambda_U(E).$$

3. Wir geben nun einige Beispiele[1] an:

3.1. $\mathscr{E}[-1,1]$ sei der lineare Raum der auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1,1]$ beliebig oft differenzierbaren reellen oder komplexen Funktionen. $\mathscr{E}[-1,1]$ wird zu einem nuklearen Raum, wenn man die Topologie erzeugt durch das System der Normen

$$p_n(x) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \max_{|t| \leqslant 1} |x^{(k)}(t)|.$$

Der diametrale Folgenraum von $\mathscr{E}[-1,1]$ ist (s). Da die Tschebyschew-Polynome $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ in $\mathscr{E}[-1,1]$ eine reguläre Basis bilden, gilt nach Satz 2 für $E_i = \text{spann}(T_0, T_1, \ldots, T_{i-1})$, für jede beschränkte Menge A von $\mathscr{E}[-1,1]$ und für alle $k, n \in \{0,1,2,\ldots\}$

$$\lim_{i \to \infty} i^k \rho(A, p_n, E_i) = 0.$$

Für $n = 0$ erhält man einen Satz von Jackson (vgl. Meinardus [*3*]).

3.2. Der Raum $\mathscr{S}$ aller auf $\boldsymbol{R}$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit

$$s_n(x) = \sup_{t \in \boldsymbol{R}} \left\{(1 + t^2)^n \sum_{k=0}^{n} |x^{(k)}(t)|\right\} < \infty$$

ist ein nuklearer Raum, wenn man ihn mit der aus den Normen s_n gewonnenen Topologie versieht. $\mathscr{S}$ ist isomorph (s), also ist $\Lambda_U(\mathscr{S}) = (s)$. Die Hermiteschen Funktionen

$$h_n(t) = e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$$

bilden eine reguläre Basis für $\mathscr{S}$. Wir setzen $E_i = \text{spann}(h_0, \ldots, h_{i-1})$. Also gilt nach Satz 2 für alle beschränkten Teilmengen A von E und für alle k, $n \in \{0,1,2,\ldots\}$

$$\lim_{i \to \infty} i^k \rho(A, s_n, E_i) = 0.$$

3.3. Der Raum $\mathscr{A}(G)$ der in einer offenen Menge G der endlichen komplexen Ebene holomorphen Funktionen wird zu einem nuklearen Raum, wenn man seine Topologie erzeugt durch das System der Normen

$$p_K(f) = \max\{|f(z)|, z \in K\}$$

---

[1] Die hier aufgeführten Beispiele von nuklearen Räumen findet man in [*4*], [*5*].

wo K die Gesamtheit der kompakten Teilmengen von G durchläuft. Ist insbesondere $G_R = \{z \in C, |z| < R\}$, so ist $\mathscr{A}(G_R)$ isomorph dem Potenzreihenraum

$$\Gamma = \left\{ \{\eta_i, i \in I\}, \sum_I |\eta_i| r^i < \infty \qquad \text{für } 0 < r < R \right\}.$$

Die diametrale Dimension $\Delta_U(\mathscr{A}(G_R))$ ist daher (vgl. [5]) die Menge aller positiven Zahlenfolgen mit der Eigenschaft: Für alle q mit $0 < q < 1$ gilt $\sup\{\delta_i^{-1} q^i, i \in I\} < \infty$. In $\mathscr{A}(G_R)$ bilden die Potenzen $1, z, z^2, \ldots$ eine reguläre Basis. Ist $E_i = \operatorname{spann}(1, z, \ldots, z^{i-1})$, so gilt nach Satz 2 für jede beschränkte Teilmenge A, für jede kompakte Teilmenge K von G_R und für alle $\delta \in \Delta_U(\mathscr{A}(G_R))$

$$\lim_{i \to \infty} \delta_i^{-1} \rho(A, p_K, E_i) = 0.$$

3.4. Der lineare Raum $\mathscr{G}^m$ der ganzen Funktionen $\varphi(z) = \varphi(z_1, \ldots, z_m)$ von m komplexen Veränderlichen wird zu einem nuklearen Raum, wenn man seine Topologie erzeugt durch das System der Normen

$$p_n(\varphi) = \left\{ \sup\{|\varphi(z)|, \sum_{j=1}^m |z_j|^2 \leqslant n \right\}$$

$\mathscr{G}^m$ ist isomorph dem Potenzreihenraum

$$\Gamma = \left\{ \{\eta_i, i \in I\}, \sum_I |\eta_i| r^{i^{1/m}} < \infty \qquad \text{für } 0 < r < \infty \right\}.$$

Daher ist $\Lambda_U(\mathscr{G}^m) = \Gamma$, und $\mathscr{G}^m$ besitzt eine reguläre Basis φ_k. Ist $E_i =$ spann $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})$, so gilt nach Satz 2 für alle beschränkten Teilmengen A von $\mathscr{G}^m$, für alle $k, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\lim_{i \to \infty} r^{i^{1/m}} \rho(A, p_n, E_i) = 0$$

für alle $r > 0$.

3.5. Der lineare Raum $\mathscr{G}_\sigma{}^m$ der ganzen Funktionen $\varphi(z)$ der Ordnung $\sigma < \infty$ von m Veränderlichen wird zu einem nuklearen Raum, wenn man seine Topologie erzeugt durch das System der Normen

$$p_n(\varphi) = \sup\{|\varphi(z)| \exp(-|z|^{\sigma + 1/n})\}$$

$\mathscr{G}_\sigma{}^m$ ist isomorph dem Potenzreihenraum

$$\left\{ \{\eta_i, i \in I\}, \sum_I |\eta_i| r^{i^{1/m} \log i} < \infty, \quad 0 < r < 1 \right\}$$

und besitzt daher eine reguläre Basis φ_k.

Die diametrale Dimension $\Delta_U(\mathscr{G}_\sigma{}^m)$ ist daher die Menge aller positiven Zahlenfolgen δ mit der Eigenschaft: Für alle q mit $0 < q < 1$ gilt

$$\sup\{\delta_i^{-1} q^{i^{1/m} \log i}, i \in I\} < \infty.$$

Also gilt nach Satz 2 für $E_i = \operatorname{spann}(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})$, für alle beschränkten Teilmengen A von $\mathscr{G}_\sigma{}^m$, für alle $\delta \in \Delta_U(\mathscr{G}_\sigma{}^m)$ und für alle natürlichen Zahlen n

$$\lim_{i\to\infty} \delta_i^{-1}\, \rho(A, p_n, E_i) = 0.$$

3.6. Auf einer offenen Menge G des n-dimensionalen euklidischen Raumes sei durch

$$Lx = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_i}\left(\alpha_{ik}(t)\frac{\partial}{\partial t_k} x(t)\right)$$

ein Differentialausdruck gegeben, dessen meßbare Koeffizienten der Elliptizitätsbedingung

$$\gamma \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}(t)\,\eta_i\,\bar{\eta}_k \leqslant \mu(t) \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2$$

genügen. Dabei sollen γ eine positive Konstante und μ eine lokal p-integrable Funktion mit $p > n/2$ sein. Dann ist nach Pietsch [*6*] der Lösungsraum

$$\mathscr{N}_L(G) = \{x, Lx = 0\}.$$

ein nuklearer Raum, wenn man ihn mit der aus den Halbnormen

$$p_K(x) = \max\{|x(t)|,\ t \in K\}$$

erzeugten lokalkonvexen Topologie versieht (K durchlaufe die kompakten Teilmengen von G). Aus dem Korollar zu Satz 1 folgt dann, daß i-dimensionale Teilräume E_i von $\mathscr{N}_L(G)$ existieren mit der Eigenschaft: Für jede beschränkte Teilmenge A von $\mathscr{N}_L(G)$, für jede kompakte Teilmenge K von G und für alle natürlichen Zahlen k gilt

$$\lim_{i\to\infty} i^k\, \rho(A, p_K, E_i) = 0.$$

3.7. Weitere Beispiele für nukleare Räume findet man in den Arbeiten von Wloka [*9*]. Triebel [*8*] behandelt Lösungsräume von singulären Differentialoperatoren.

Literatur

1. C. Bessaga, A. Pełczyński, und S. Rolewicz, On diametral approximative dimension and linear homogenity of F-spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci.* **9** (1961), 677–683.

2. M. M. Dragilew, Über reguläre Basen in nuklearen Räumen. *Mat. Sb.* **68** (1965), 153–173.

3. G. Meinardus, "Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung". Springer, Berlin, 1964.

4. B. S. Mitjagin, Approximative dimension and bases in nuclear spaces. *Russ. Math. Surv.* **16** (4) (1961), 59–127 (Uspekhi).

5. A. Pietsch, "Nukleare lokalkonvexe Räume". Akademie-Verlag, Berlin, 1965.

6. A. Pietsch, Nukleare Funktionenräume. *Math. N.* **33** (1967) 377–384.

7. E. Schock, Der diametrale Folgenraum eines nuklearen lokalkonvexen Raumes, *Forschungsberichte Land Nordrhein-Westfalen* Nr. **1931**. Westdeutscher Verlag Opladen, 1968.
8. H. Triebel, Erzeugung nuklearer lokalkonvexer Räume durch singuläre Differentialoperatoren zweiter Ordnung. *Math. Ann.* **174** (1967), 163–176.
9. J. Wloka, Reproduzierende Kerne und nukleare Räume. I, II. *Math. Ann.* **163** (1966), 167–188; **172** (1967), 79–93.